

ĐỀ THI HỌC KỲ I NĂM HỌC 2009-2010.

Môn học: Giải tích 1.

Thời gian làm bài: 90 phút. Đề thi gồm 7 câu.

HÌNH THỨC THI: TỰ LUẬN

CA 2

Câu 1 : Tính giới hạn (trình bày lời giải cụ thể) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(\sin x + \sqrt{1+x^2})}{\tan x - x \cos^2 x}$.

Câu 2 : Khảo sát và vẽ đồ thị của đường cong $y = (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$.

Câu 3 : Tìm và phân loại tất cả các điểm gián đoạn của đồ thị hàm số $y = \lg(x^2 + 3x)$.

Câu 4 : Giải phương trình vi phân $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ với điều kiện $y(1) = 1$.

Câu 5 : Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' + y = \sinh(2x)$.

Câu 6 : Tính tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{13/3} \cdot \sqrt[3]{1+x^2}}$

Câu 7 : Giải hệ phương trình vi phân bằng phương pháp khử hoặc trị riêng, vectơ riêng.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 6y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = x + y + 5z \end{cases}$$

Đáp án

Câu 1(.5 điểm). Khai triển: $\sin x + \ln(\sin x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$; $\tan x - x \cos^2 x = \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

$$\rightarrow I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \ln(\sin x + \sqrt{1+x^2})}{\tan x - x \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{4x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{8}.$$

Câu 2(1.5 điểm). Tập xác định $x > -1$, đạo hàm: $y' = (1+x)^{1/(x+1)} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} (1 - \ln(x+1))$

$\rightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq e - 1$. Hàm tăng trên $(0, e - 1)$, giảm trên $(e - 1, +\infty)$, cực đại tại $x = e - 1, f_{cd} = e^{1/e}$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)^{1/(x+1)} = 0$, không có tiệm cận đứng, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^{1/(x+1)} = 1$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Lập bảng biến thiên, tìm vài điểm đặc biệt, vẽ.

Câu 3(1.0đ). Miền xác định $x < -3, x > 0, y$ liên tục trên toàn MXĐ, không có điểm gián đoạn.

Câu 4(1.5đ). $y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right); y = e^{\int 1/xdx} \left(\int \frac{-\ln x}{x} \cdot e^{\int -1/xdx} dx + C \right)$

$$y = x \left(\int \frac{-\ln x}{x^2} dx + C \right) = x \left(\frac{\ln x + 1}{x} + C \right); y(1) = 1 \Leftrightarrow C = 0 \rightarrow y = \ln x + 1.$$

Câu 5(1.5đ). P. trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \rightarrow y_0 = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$. Tìm nghiệm riêng:

$$y_r = y_{r1} + y_{r2}, \text{ với } y_{r1} = \frac{e^{2x}}{2} \text{ là nghiệm riêng của } y'' - 2y' + y = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$y_{r2} = \frac{-e^{-2x}}{18} \text{ là nghiệm riêng của } y'' - 2y' + y = \frac{-e^{-2x}}{2}. \text{ Kết luận: } y_{tq} = y_0 + y_{r1} + y_{r2}.$$

Câu 6 (1.5đ) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^{13} + x^{15}}} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}}}$. Đặt $t = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow t^3 = 1 + \frac{1}{x^2}$

$$I = \int_{\sqrt[3]{2}}^1 \frac{-3}{2} t(t^3 - 1) dt = \frac{-3}{20} \cdot \sqrt[3]{4} + \frac{9}{20}$$

Câu 7(1.5đ). Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Chéo hóa $A = PDP^{-1}$,

$$\text{với } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

Hệ phương trình $X' = A \cdot X \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$, đặt $X = P^{-1}Y$, có hệ

$$Y' = DY \Leftrightarrow y_1' = 8y_1; y_2' = 4y_2; y_3' = 4y_3 \rightarrow y_1(t) = C_1 e^{8t}; y_2(t) = C_2 e^{4t}; y_3(t) = C_3 e^{4t}$$

Kluận: $X = PY \Leftrightarrow x_1(t) = C_1 e^{8t} - C_2 e^{4t} - C_3 e^{4t}; x_2(t) = 2C_1 e^{8t} + C_2 e^{4t}; x_3(t) = C_1 e^{8t} + C_3 e^{4t}$