

ĐỀ THI HỌC KỲ I NĂM HỌC 2009-2010.

Môn học: Giải tích 1.

Thời gian làm bài: 90 phút. Đề thi gồm 7 câu.

HÌNH THỨC THI: TỰ LUẬN

CA 3

Câu 1 : Tính giới hạn (trình bày lời giải cụ thể) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2 \tan x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$.

Câu 2 : Khảo sát và vẽ đồ thị của đường cong $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Câu 3 : Tìm và phân loại tất cả các điểm gián đoạn của đồ thị hàm số $y = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Câu 4 : Tính tích phân suy rộng $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + x - 1}}$

Câu 5 : Giải phương trình vi phân $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ với điều kiện $y(2) = 1$.

Câu 6 : Giải phương trình vi phân $y'' - 4y' + 4y = \cosh(x)$.

Câu 7 : Giải hệ phương trình vi phân bằng phương pháp khử hoặc trị riêng, vectơ riêng.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 5y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = x + y + 4z \end{cases}$$

Câu 1(1 điểm). Khai triển: $\sqrt{1+2 \tan x} - e^x + x^2 = \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$; $\arcsin x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\rightarrow I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2 \tan x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = 2.$$

Câu 2(1.5 điểm). Tập xác định $x \neq 0$, đạo hàm: $y' = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$

$\rightarrow y' \leq 0 \forall x \neq 0$. Hàm giảm trên toàn mxđ, không có cực trị

$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$, tiệm cận đứng $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Lập bảng biến thiên, tìm vài điểm đặc biệt, vẽ.

Câu 3(1.5đ). Miền xác định $x \neq \frac{k\pi}{3}, k \in Z$. Điểm gián đoạn loại 1, khử được: $x = m\pi$; điểm gián

đoạn loại 2: $x = \frac{k\pi}{3}, k$ không chia hết cho 3.

Câu 4 (1.5đ) Đặt $\sqrt{x^2 + x - 1} = t + x \rightarrow x = \frac{t^2 + 1}{1 - 2t} \rightarrow dx = \frac{-2(t^2 - t - 1)dt}{(2t - 1)^2}$.

Đổi cận: $t = \sqrt{x^2 + x - 1} - x; x = 2 \rightarrow t = \sqrt{5} - 2, x = +\infty \rightarrow t = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - x) = \frac{1}{2}$

$$\rightarrow I = \int_{\sqrt{5}-2}^{1/2} \frac{2dt}{t^2 + 1} = \arctan \frac{1}{2}$$

Câu 5(1.5đ). $2y' = 3\frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, đặt $u = \frac{y}{x}$, $\rightarrow y' = u + xu' \rightarrow \frac{2u}{u^2 - 1}du = \frac{dx}{x}$

$$\rightarrow \ln |u^2 - 1| = \ln |x| + \ln C \Leftrightarrow |u^2 - 1| = C|x| \Leftrightarrow u^2 - 1 = C_1x \Leftrightarrow y^2 = C_1x^3 + x^2$$

Điều kiện $y(2) = 1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{-8}{3}$. Nghiệm của ptinh: $y^2 + \frac{8x^3}{3} - x^2 = 0$

Câu 6(1.5đ). Ptinh đặc trưng $k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 4 \rightarrow y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{2x}$.

Tìm nghiệm riêng: $y_r = y_{r_1} + y_{r_2}$, với $y_{r_1} = \frac{e^x}{2}$ là nghiệm riêng của $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^x}{2}$;

$y_{r_2} = \frac{e^{-x}}{18}$ là nghiệm riêng của $y'' - 2y' + y = \frac{e^{-x}}{2}$. Kết luận: $y_{tg} = y_0 + y_{r_1} + y_{r_2}$.

Câu 7(1.5đ). Ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Chéo hóa $A = PDP^{-1}$,

với $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

Hệ phương trình $X' = A \cdot X \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$, đặt $X = P^{-1}Y$, có hệ

$Y' = DY \Leftrightarrow y_1' = 7y_1; y_2' = 3y_2; y_3' = 3y_3 \rightarrow y_1(t) = C_1 e^{7t}; y_2(t) = C_2 e^{3t}; y_3(t) = C_3 e^{3t}$

Kluận: $X = PY \Leftrightarrow x_1(t) = C_1 e^{7t} - C_2 e^{3t} - C_3 e^{3t}; x_2(t) = 2C_1 e^{7t} + C_2 e^{3t}; x_3(t) = C_1 e^{7t} + C_3 e^{3t}$