ĐỀ THI HỌC KỲ I NĂM HỌC 2009-2010

Môn học: Đại số tuyến tính.

Thời gian làm bài: 90 phút. Đề thi gồm 7 câu.

Sinh viên không được sử dụng tài liệu.

HÌNH THỨC THI: TỰ LUẬN

CA 1

Câu 1 : Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Tính A^{2010}, biết A có hai trị riêng là 1 và 3.

Câu 2 : Tìm chiều và một cơ sở TRỰC CHUẨN của không gian nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 12x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 3 : Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, biết ma trận của f trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $E = \{(1,2,1),(1,1,2);(1,1,1)\}$.

Câu 4 : Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, biết ma trận của f trong cơ sở $E = \{(0,1,1),(1,0,1);(1,1,1)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Tìm cơ sở và số chiều của ker$f$.

Câu 5 : Cho$A$ là ma trận vuông tùy ý, thực, cấp n, thoả $A^{10} = 0$. Chứng tỏ rằng A chéo hoá được khi và chỉ khi A là ma trận không.

Câu 6 : Tìm m để ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$ có ba trị riêng dương (có thể trùng nhau).

Câu 7 : Trong hệ trục toạ độ Oxy cho đường cong (C) có phương trình $5x^2+2xy+5y^2-2\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y = 0$. Nhận dạng và vẽ đường cong (C).

Đáp án đề thi Đại số tuyến tính, năm 2009-2010, ca 1

Thang điểm: Câu 1, 2, 3, 4, 5, 6: 1.5 điểm; câu 7: 1.0 điểm.

Câu 1(1.5đ). Chéo hóa ma trận (1đ) $A = PDP^{-1}$; $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$A^{2010} = PD^{2010}P^{-1}$, tính ra được $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $D^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{2010} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2010} \end{pmatrix}$.

Câu 2 (1.5đ). Tìm một cơ sở tùy ý của không gian nghiệm: $E = \{(2,-1,1,0),(3,-1,0,1)\}$

Dùng quá trình Gram-Schmidt đưa về cơ sở trực giao: $E_1 = \{(2,-1,1,0),(4,1,-7,6)\}$

Chuẩn hóa, có cơ sở trực chuẩn: $E_2 = \{\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{67}}(4,1,-7,1)\}$

Câu 3 (1.5đ). Có nhiều cách làm. Ma trận chuyển cơ sở từ chính tắc sang E là: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cơ sở E là $B = P^{-1}AP$= $\begin{pmatrix} 8 & 11 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -9 & -2 \end{pmatrix}$

Câu 4(1.5đ) . Giả sử $x \in Kerf; [x]_E = (x_1, x_2, x_3)^T$. Khi đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x)]_E = 0 \Leftrightarrow A \cdot [x]_E = 0$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [x]_E = \begin{pmatrix} 6\alpha \\ -11\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = (-10\alpha, 7\alpha, -4\alpha)$.
Dim$(Kerf) = 1$, cơ sở: $(10, -7, 4)$.

Câu 5 (1.5đ). Vì $A^{10} = 0$ nên A chỉ có một trị riêng là $\lambda = 0$ (theo tính chất, nếu λ_0 là TR của A, thì λ_0^{10} là TR của A^{10}. A chéo hóa được $\Leftrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, D là ma trận 0 nên $A = 0$.

Câu 6 (1.5đ). Ma trận đối xứng thực có ba trị riêng dương, suy ra dạng toàn phương tương ứng xác định dương (hay ma trận đã cho xác định dương). Theo Sylvester, A xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính dương $\Leftrightarrow \delta_1 = 1 > 0, \delta 2 = 1 > 0, \delta_3 = det(A) = m - 58 > 0 \Leftrightarrow m > 58$.

Câu 7(1.0đ). Xét dạng toàn phương $5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Chéo hóa trực giao ma trận A bởi ma trận trực giao $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và ma trận chéo $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Đường cong (C) có ptrình trong hệ trục Ouv với hai véctơ cơ sở là $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ là: $6(u + \frac{1}{6})^2 + 4(v + \frac{3}{4})^2 = \frac{11}{12}$. Đây là đường cong ellipse. Hệ trục Ouv thu được từ hệ Oxy bằng cách quay 1 góc 45^o ngược chiều kim đồng hồ.